Kalkulus negyedik feladatsor

Sorozatok

1. Döntsük el az alábbi sorozatokról, hogy korlátosak-e! Viszgáljuk meg őket monotonítás szempontjából! Sejtsük meg a határértéküket a sorozat tagjait számegyenesen ábrázolva! Döntsük el, hogy mely sorozatok konvergensek, illetve divergensek!

   a, $(a_n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)$
   b, $(b_n) = \frac{(-1)^n}{n^2}$
   c, $(c_n) = 2^n$
   d, $(d_n) = -n^2 - n$
   e, $(e_n) = (-3)^n$
   f, $(f_n) = \cos(\frac{n\pi}{4})$

2. Adjunk példát olyan sorozatra (ha létezik olyan), amely:

   a, konvergens, de nem korlátos;
   b, korlátos, de nem konvergens;
   c, monoton növő, de nem konvergens;
   d, szigorúan monoton növő és konvergens;
   e, korlátos, konvergens, de nem monoton;
   f, monoton fogyó, de nem korlátos;
   g, van határértéke, de nem konvergens (tehát divergens);

3. Adjunk példát olyan $a_n \to +\infty$ és $b_n \to +\infty$ sorozatokra, amelyre:

   a, $\lim \frac{a_n}{b_n} = 0$;
   b, $\lim \frac{a_n}{b_n} = 1$;
   c, $\lim \frac{a_n}{b_n} = -3$;
   d, $\lim \frac{a_n}{b_n} = +\infty$;

4. Számítsuk ki az alábbi sorozatok határértékét!

   a, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3 + 3n^2 - 7}{5n^3 + 9n}$
   b, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2 + 7n}{n^3 - 12n}$

c, $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+3n^2+7}{3n^2+17}$

d, $\lim_{n\to\infty} \frac{n-3n^2-1}{5-n}$

e, $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2-n^6-n^5}{n-4n^5+n^8}$

f, $\lim_{n\to\infty} \frac{n^4}{5-4\sqrt{n}-6n^4}$

5. * Igazoljuk az alábbi határértékeket a definíció felhasználásával, azaz adjunk meg egy megfelelő küszöbszámot (és küszöbindexet)!

a, $\lim_{n\to\infty} \frac{2}{n^2+1} = 0$

b, $\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+4n+7}{n^2+n+1} = 3$ *(Kónya 1/10)*

c, $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-10^8}{5n^6+2n^3-1} = 0$ *(Kónya 1/11)*